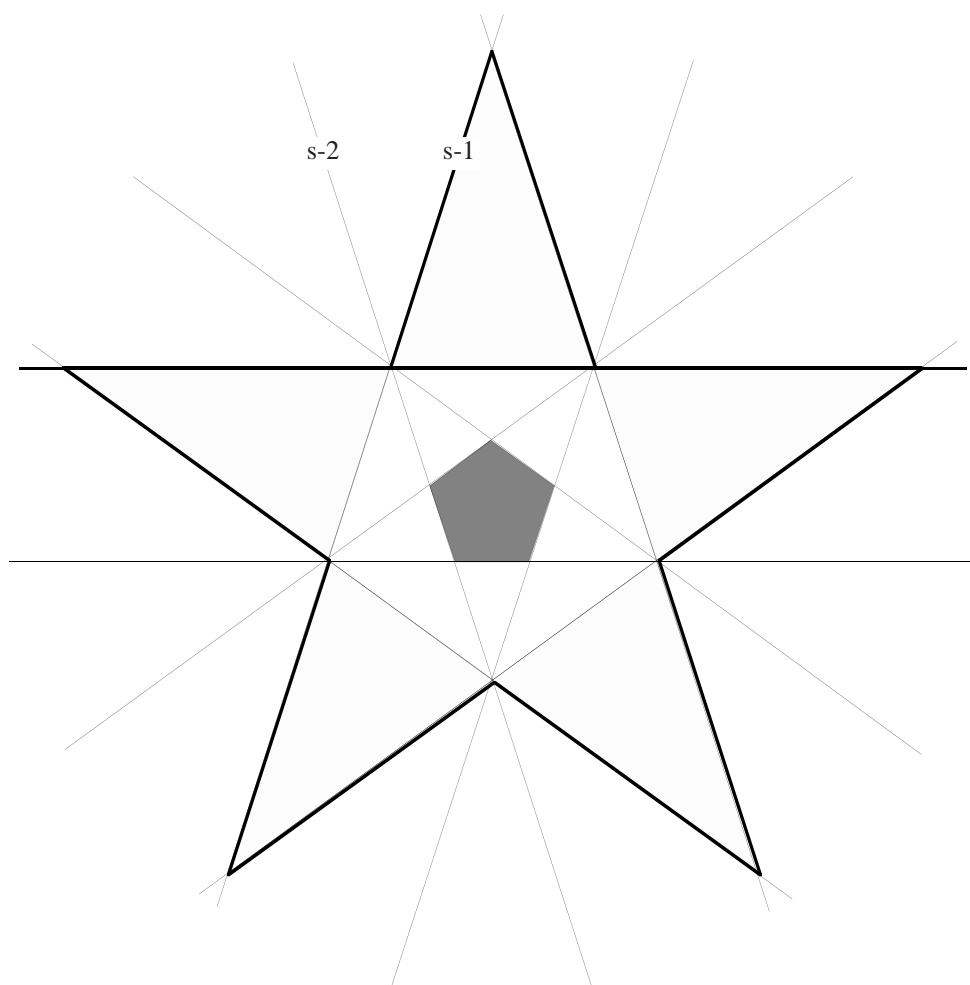


## BIJLAGE H

*De verbinding met het 'On-eindige' vanuit het twaalf-, het ruitendertig- en het twintig-vlak*

*Het twaalfvlak of dodecaëder*

Een dodecaëder ligt besloten tussen 6 paren van evenwijdige vlakken. Als die zich nog 'oneindig' ver buiten dit lichaam uitstrekken, doorsnijden ze elkaar met  $(6-1) \cdot 2 = 10$  snijlijnen per vlak. Afb. 52 geeft de hiermee gepaard gaande *vlakverdeling*. De snijlijnen 'ontmoeten' elkaar enige malen alvorens als het ware te verdwijnen in het 'oneindige'. Elk ontmoetingspunt ligt in 3 of 5 van de 12 vlakken. De vlakken verdelen de ruimte in *een aantal eindige (Ne) en een aantal 'oneindige' (No) bouwstenen*.



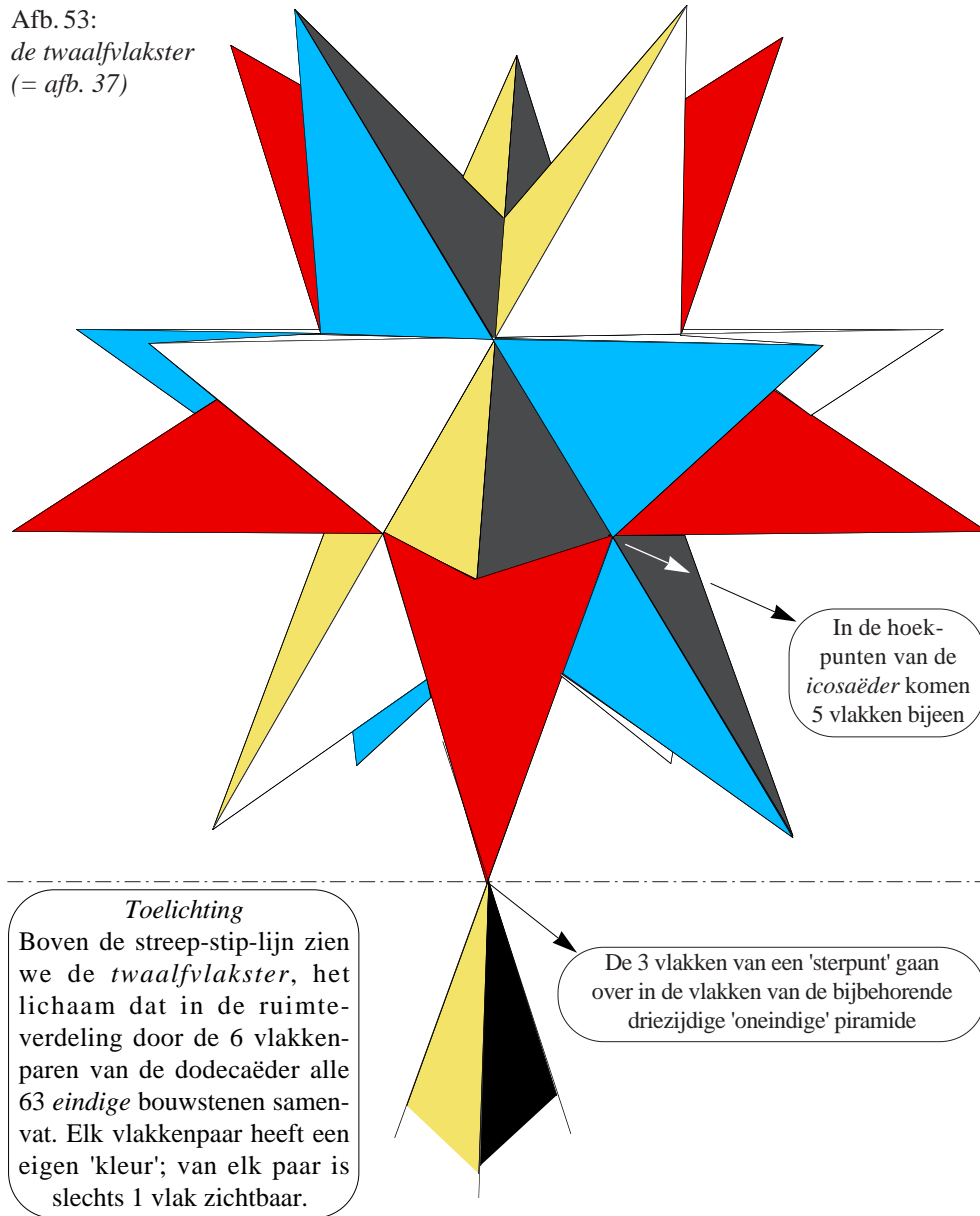
Afb. 52:

*vlakverdeling vanuit het twaalfvlak;*

in het midden ligt het donker gemaakte vlakje van een dodecaëder. Daar omheen 5 paren van evenwijdige lijnen, de snijlijnen met de andere vlakken van de dodecaëder. De grijze delen corresponderen met het grensvlak van de eindige bouwstenen met de 'oneindige'. Zie voor de snijlijntypering tabel I op p. 152. -

De *eindige bouwstenen* vormen een lichaam dat we *de twaalfvlakster* zullen noemen, zijn oppervlak is het grensvlak met de 'oneindige' bouwstenen. Afb. 53 laat er een perspectivische projectie van zien.

Afb. 53:  
*de twaalfvlakster*  
(= *afb. 37*)



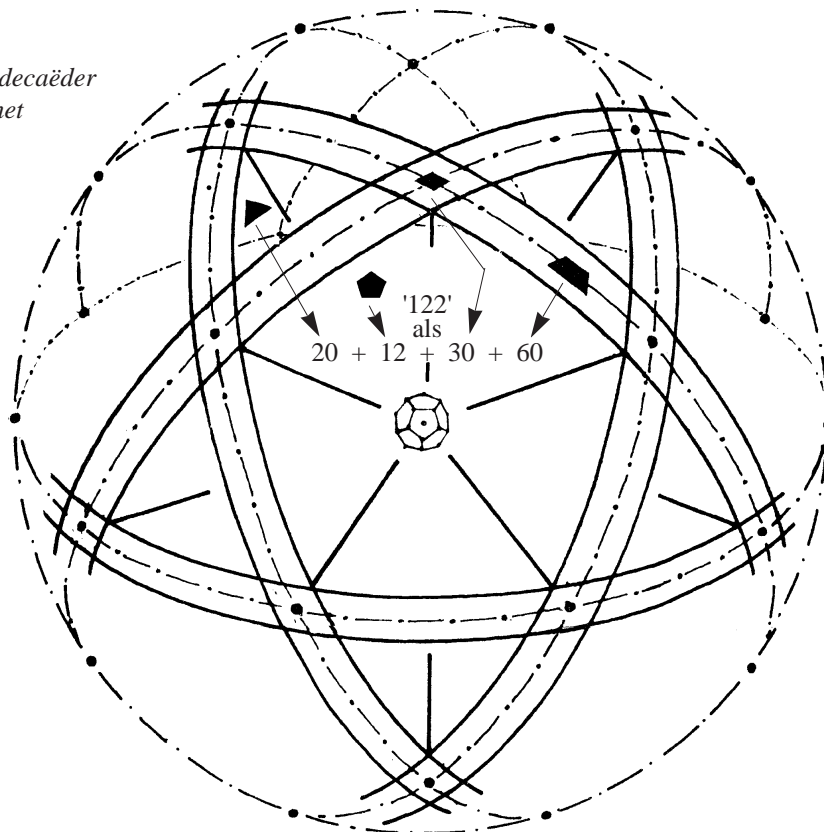
Om te weten in hoeveel bouwstenen de ruimte wordt verdeeld door de dodecaëdervlakken, denken we ons rondom het middelpunt een bol. De diameter kiezen we zo groot dat in de vlakverdeling alle ontmoetingspunten nog (ruim) binnen het boloppervlak liggen. Elk dodecaëdervlak snijdt de bol volgens een parallelcirkel. De in dit vlak gelegen snijlijnen markeren daarop de hoekpunten van een veelvlak.

We zullen dit veelvlak als representant gebruiken van de verdeling van de ruimte zoals die door de vlakken van de dodecaëder teweeggebracht wordt; als '*plaatsvervangend veelvlak*' bevat het namelijk alle eindige bouwstenen (Ne) met aangrenzend van elk van de 'oneindige' nog een (eindig) stuk. Afb. 54 geeft van een en ander een indruk. In het centrum van een bol bevindt zich een kleine dodecaëder. Op de bol zien we de parallelcirkels die de vlakken van de dodecaëder daarop insnijden. Eveneens, doch met een streep-stip-lijn, de daar tussen liggende grootcirkels. Wat betreft het bovengenoemd *plaatsvervangend veelvlak*, vinden we op de bol de corresponderende aaneenschakeling van bol-driehoeken, -vijfhoeken, -trapezia en -ruiten. Langs die weg zijn aard en aantal van de 'oneindige' bouwstenen af te leiden, namelijk:

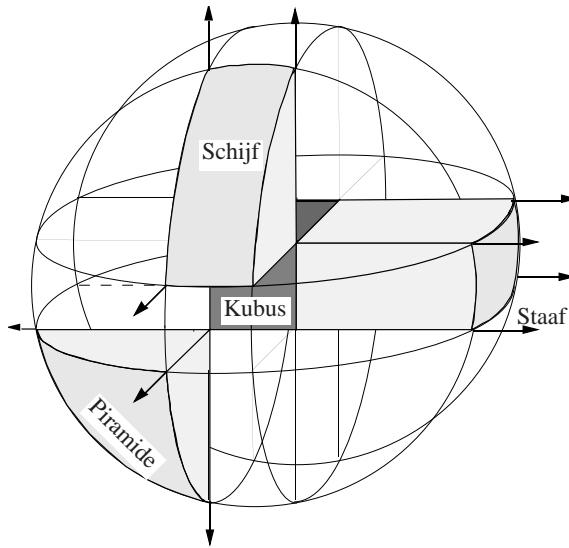
20 bol-driehoeken in plaats van 20 <i>driezijdige Piramiden</i> en	
12 bol-vijfhoeken „ „ „	12 <i>vijfzijdige Piramiden</i> ; een en ander gescheiden
door 60 boltrapezia „ „ „	60 <i>Schijven</i> (trapeziumvormige doorsnede)
en 30 bol-ruiten „ „ „	30 <i>Staven</i> (ruitvormige doorsnede)
totaal 122 =	'No', . . . . . in 61 <i>diametraal geordende paren</i> , als ' <i>verbinding</i> ' tussen het <i>eindige</i> en het ' <i>On-eindige</i> '.

N.B.: een grotere bol maakt de bol-driehoeken en -vijfhoeken naar verhouding groter; de bol-trapezia behouden alleen hun 'hoogte' en de bol-ruiten blijven in afmeting gelijk. -

Afb. 54:  
*hetgeen de dodecaëder  
verbindt met het  
'Oneindige'*



'*Oneindige*' bouwstenen onderscheiden we in Staven (St), Schijven (Sc) en Piramiden (Pi), met



Afb. 55: de 'verbinding' van de kubus met  
(= afb. 37) het 'On-eindige'

resp. 1, 2 en 3 'oneindige' dimensies. De kubus in afb. 55 - zie ook bij afb. 35 op p. 87 - geeft een indruk van wat we ons daarbij hebben voor te stellen:

- *Staven* zijn gebieden in de ruimte die tot de gemeenschappelijke tussenruimte van 2 of meer paren van evenwijdige vlakken behoren. Bij meer dan 2 ontstaan bundels van *Staven* (Bst);
- *Schijven* vullen de resterende ruimte tussen zo'n vlakkenpaar;
- *Piramiden* bevinden zich aan de andere zijde van de vlakkenparen. Ze worden langs elk zijvlak begrensd door een *Schijf* en langs de ribben door een *StAAF* of bundel van *Staven*.

#### Het ruitendertigvlak of triacontaëder

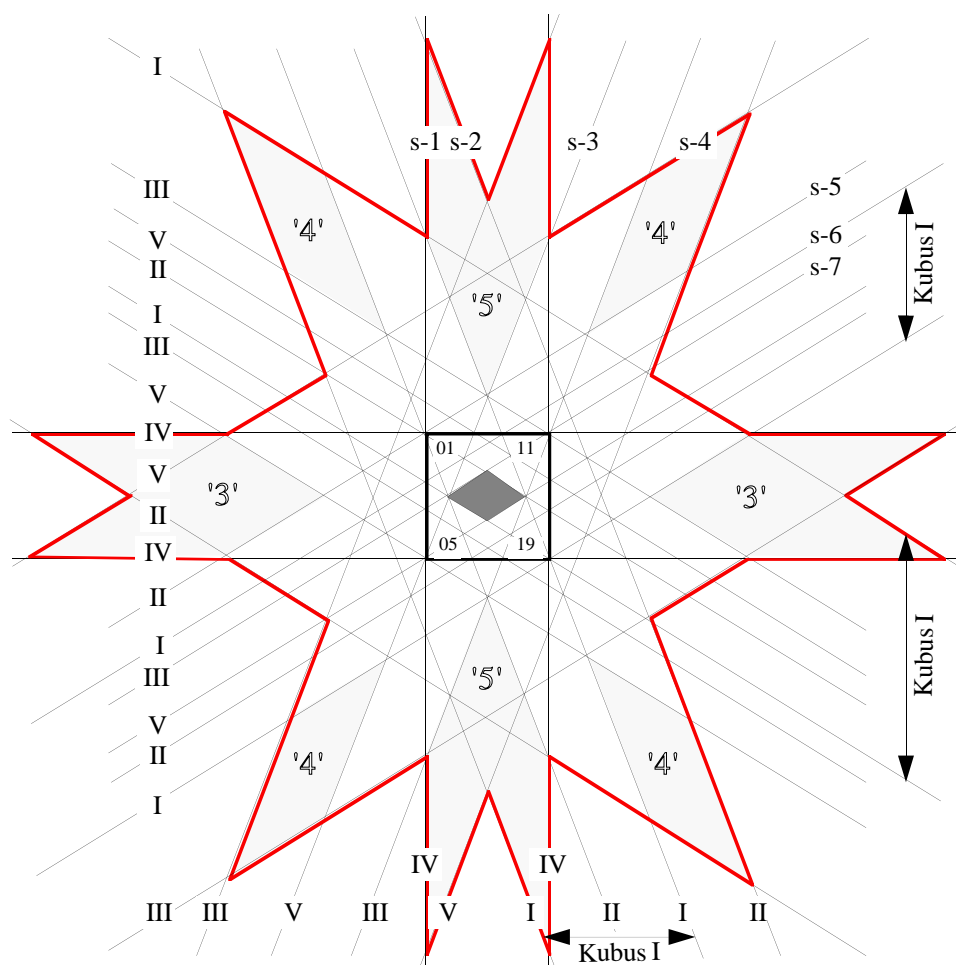
Afb. 56 toont de vlakverdeling voor het *ruitendertigvlak*, daarmee tevens voor de *Vijfvoudige Zuivere Kubiek*. Afb. 57 geeft de verdeling - hier op basis van 15 grootcirkels - van het bijbehorende boloppervlak en het daaruit af te leiden overzicht van de 'oneindige' bouwstenen. Ter verduidelijking is een karakteristiek deel van het boloppervlak vergroot en in de vorm van een uitslag afgebeeld. Het betreft het 120e deel van het totale oppervlak, dat als zodanig 60x als beeld en spiegelbeeld op de bol is terug te vinden. Inventariseren we de binnen de hartlijnen gelegen 'bolveelhoeken', resp. delen daarvan, dan geeft vermenigvuldiging met 120 dus de gezochte specificatie van de 'oneindige' bouwstenen. Ook met betrekking tot het 12-vlak en het 20-vlak, resp. in afb. 54 en 61, zou zo'n karakteristiek deel zijn aan te wijzen, doch voor de duidelijkheid is het dáár niet nodig.

Afb. 58 geeft een indruk van een *ruitendertigvlakster*, met zijn 20 drie-bladige, 12 vijf-bladige en 30 vier-bladige kelken. Het geheel is te verdelen in 120 identieke bouwelementen - niet te verwarren met de eerder genoemde bouwstenen - die in het middelpunt tezamen komen. Ze kunnen onder een bepaalde hoek van een vierkante staaf worden afgesneden. Afb. 59 geeft de maten van dit bouwelement in relatie met de kubus.

#### Het twintigvlak of icosäder

Afb. 60 toont de voor de icosäder karakteristieke vlakverdeling en daarmee tevens die voor de *Vijfvoudige Octaëder* en het *Vijfvoudig Tetraëderpaar*. Afb. 61 geeft de verdeling van het bijbehorende boloppervlak en de daaruit af te leiden gegevens met betrekking tot het aantal 'oneindige' bouwstenen. We hebben hier een verdeling door 10 grootcirkels, in plaats van de 6 bij de dodecaëder en de 15 van het ruitendertigvlak. Afb. 62 geeft tenslotte een perspectivische projectie van de hierbij verschijnende *twintigvlakster*.

Afb. 56:  
vlakverdeling vanuit het ruitendertigvlak



*Toelichting*

In het vlak van tekening vinden we van kubus IV de hoekpunten 01-05-11-19  
(zie ter oriëntatie afb. 2 en 7, op resp. p.14 en 18)

In het midden ligt het corresponderende (donkere) vlakje van het *ruitendertigvlak*.

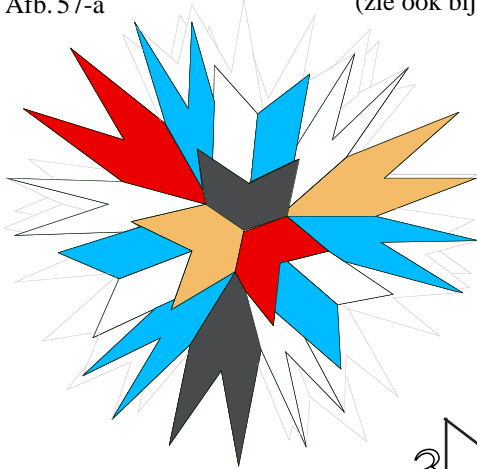
Met de romeinse cijfers I, II, III en IV is aangegeven van welke kubusvlakken de snijlijnpaaren afkomstig zijn; zie als voorbeeld de aanduidingen met betrekking tot kubus I.

De grensvlakken met de 'oneindig' grote bouwstenen zijn lichtgrijs weergegeven. Hun ligging is - niet zonder moeite - uit de vlakverdeling af te leiden, met een model zou dat aanzienlijk makkelijker gaan. De 3 typen corresponderen met de '3'-, de '4'- en de '5'-bladige kelken van de *Ruitendertigvlakster* in afb. 57.

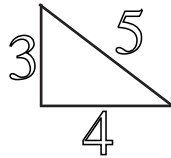
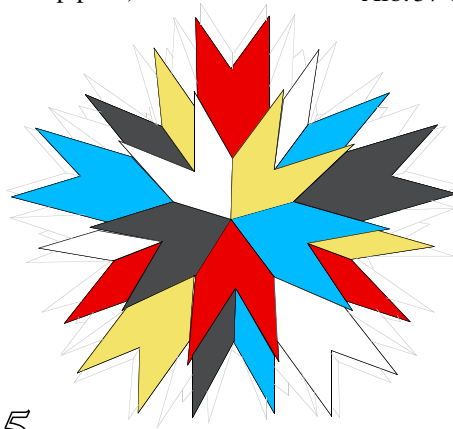
Zie tabel I op p. 152 voor de snijlijntypering (s-1 t/m s-7).

Afb. 57:  
de dertigvlakster in drie aanzichten  
(zie ook bij afb. 38 op p. 94)

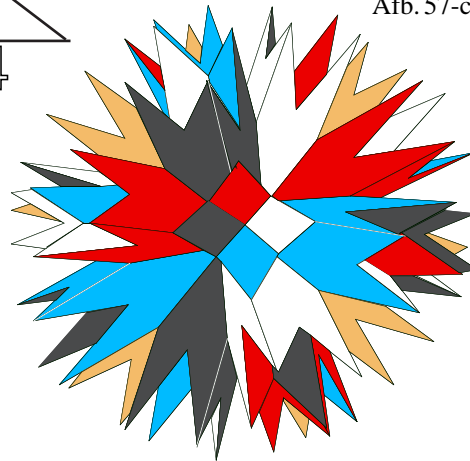
Afb. 57-a



Afb. 57-b

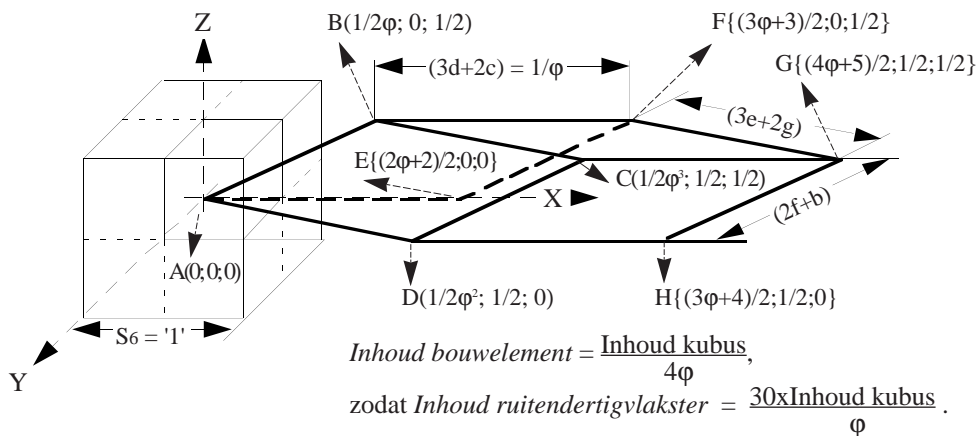


Afb. 57-c

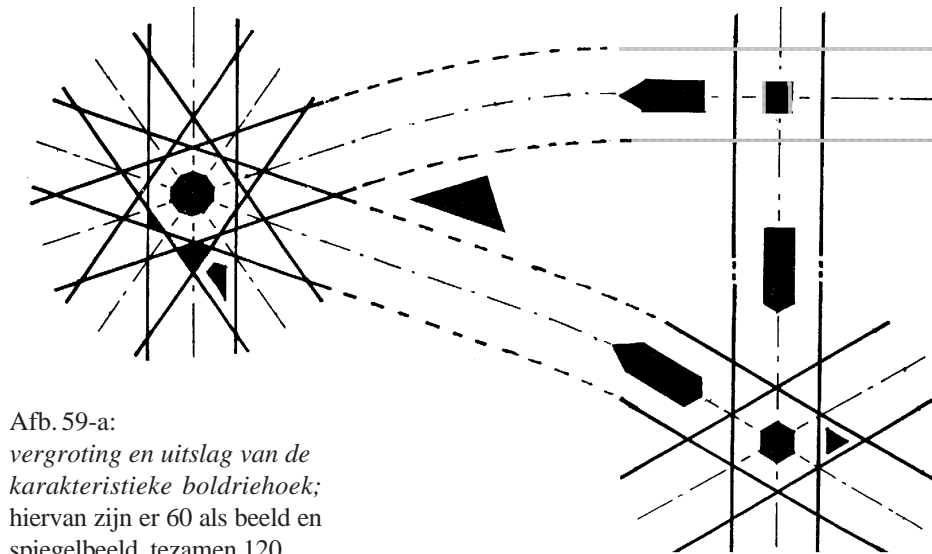
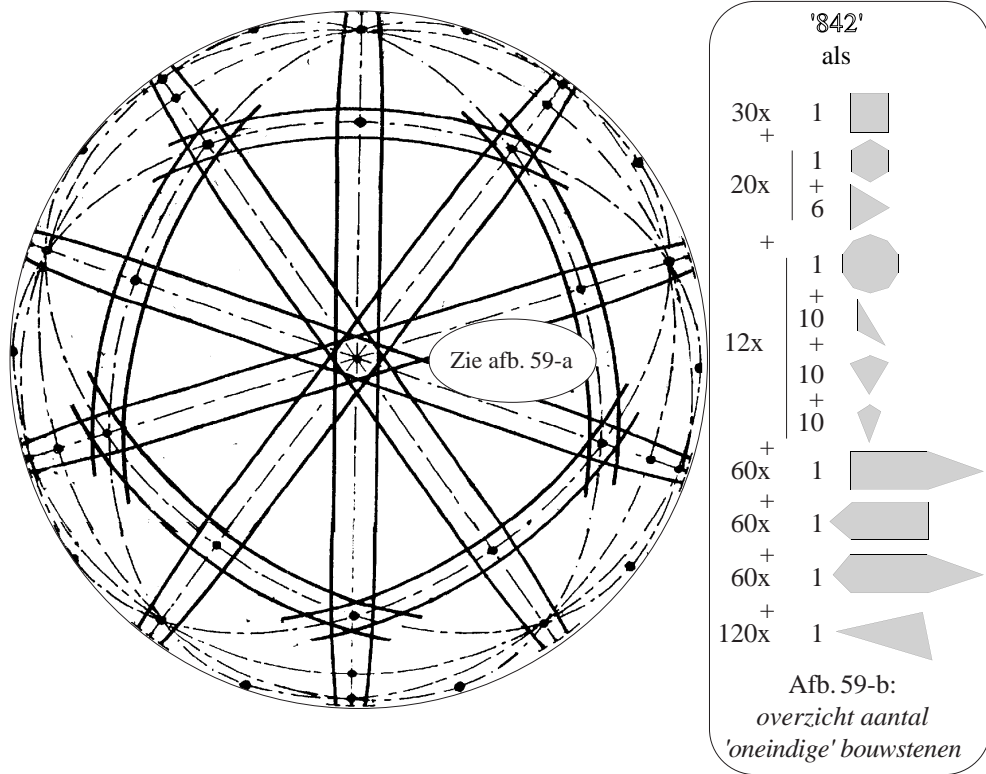


*Toelichting:*  
het beeld wordt bepaald door 5x6 vierkante staven, uitgaande van de 5x6 kubusvlakken in de dodecaëdrische ruimte; aan het uiteinde zien we steeds een 4-bladige kelk. Onderling vormen de staven twaalf 5-bladige en twintig 3-bladige kelken. Afb. 57-a, -b en -c tonen elk het beeld dat ontstaat als we recht in één van die drie kelktypen kijken.

Afb. 58: het bouwelement v/d ruitendertigvlakster, als het 120e deel (zie ook tabel I, p. 117)

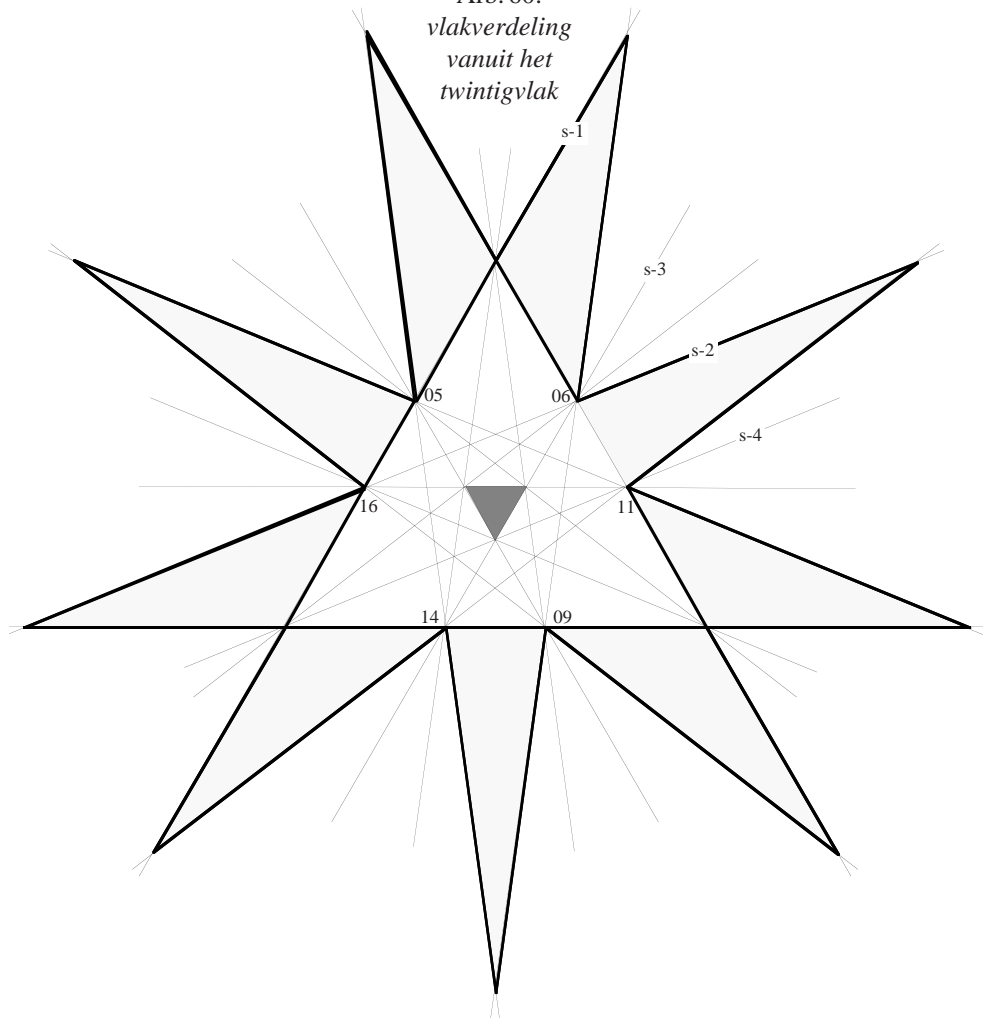


Afb. 59:  
*hetgeen de Vijfvoudige Zuivere Kubiek,  
 resp. het ruitendertigvlak,  
 verbindt met het 'On-eindige'*



Afb. 59-a:  
*vergroting en uitslag van de  
 karakteristieke boldriehoek;  
 hiervan zijn er 60 als beeld en  
 spiegelbeeld, tezamen 120.*

Afb. 60:  
vlakverdeling  
vanuit het  
twintigvlak



*Toelichting*

In het vlak van tekening vinden we - bij wijze van voorbeeld - van kubus II de hoekpunten 09-06-16 van de Z-tetraëder en van kubus IV de hoekpunten 14-05-11 van de S-tetraëder (zie eventueel ter oriëntatie afb. 2, 7 en 12 op resp. p. 14, 18 en 30).

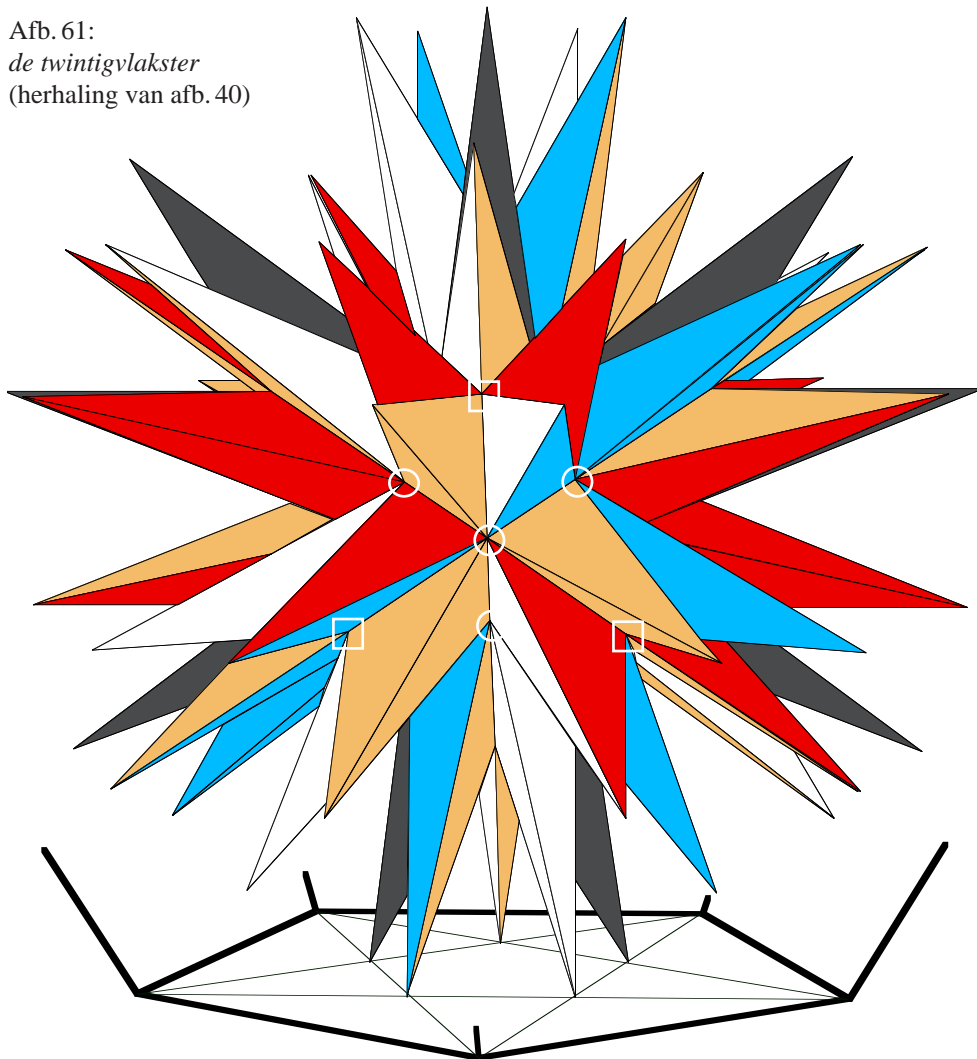
In het midden ligt het corresponderende (donkere) vlakje van de icosaeëder. Van de '22+1' regelmatige lichamen die we in de hoekpuntrelaties van de dodecaëdrische ruimte aantreffen, corresponderen de 10x4 tetraëdervlakken met de 10 paren van evenwijdige vlakken die de icosaeëder vormen. Vandaar dat bovenstaande figuur is samengesteld uit 9 snijlijnparen, namelijk 3 maal s-1 met s-3 en 6 maal s-2 met s-4

(zie tabel I op p. 152 voor de snijlijntypering).

De grensvlakken met de 'oneindig' grote bouwstenen zijn in grijs weergegeven. Hun ligging is - niet zonder moeite - uit de vlakverdeling af te leiden, met een model zou dat aanzienlijk makkelijker gaan. De 2 typen kunnen we echter ook herkennen in afb. 61.



Afb. 61:  
*de twintigvlakster*  
 (herhaling van afb. 40)



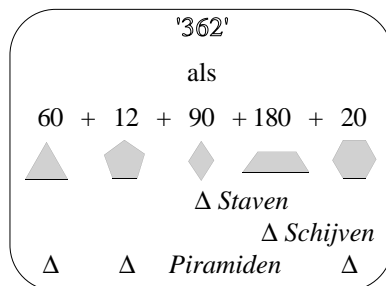
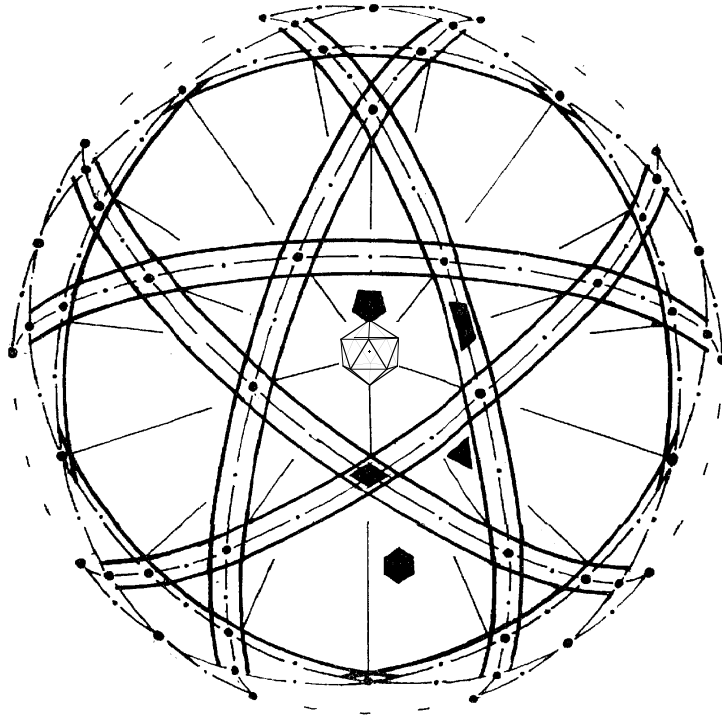
*Toelichting*

Afb. 11 op p. 29 gaf in perspectivische projectie een beeld van *de Tienvoudige Tetraëder*. Zijn vlakken vinden hun voortzetting in de vlakken van de hierboven - verkleind - weergegeven twintigvlakster. Dit lichaam betreft de ruimte waarbinnen die vlakken uitsluitend de eindige bouwstenen begrenzen; het rust als het ware met 12 vijfpuntige 'kronen' op de 12 vlakken van de oorspronkelijke dodecaëder (zie afb. 41, p. 97). De 20 hoekpunten daarvan vallen samen met die van *de Tienvoudige Tetraëder* en met de meest naar binnen gelegen hoekpunten van de Twintigvlakster. Van deze hoekpunten zijn hierboven 4 met een (wit) cirkeltje aangegeven.

De  $12 \times 5 = 60$  'sterpunten' geven de verbinding met de dodecaëder van het opvolgende stelsel van '22+1' regelmatige lichamen, en wel op de snijpunten van de daar aanwezige kubusribben (zie ter oriëntatie ook afb. 17, p. 39). Het centrum van elk van de 12 'kroonkelken' betreft een hoekpunt van het twintigvlak van dat stelsel; 3 stuks daarvan zijn hierboven van een (wit) vierkantje voorzien. De twintigvlakster telt zo in totaal  $20 + 60 + 12 = 92$  hoekpunten die elk aansluiting geven op die 'oneindige' bouwstenen welke de vorm hebben van een piramide (12 vijfzijdige, 20 zeszijdige en 60 driezijdige; zie ook afb. 62).

Afb. 62:

*hetgeen de twee Vijfvoudige Tetraëders, de Tienvoudige Tetraëder, de Vijfvoudige Octaëder resp. de icosäeder verbindt met het 'On-eindige'*



*Toelichting*

In principe is hier hetzelfde gedaan als beschreven bij afb. 54 op p. 138, doch nu op basis van een twintigvlak in plaats van een twaalfvlak.